Über Reihen, in denen die Produkte aus je zwei benachbarten Termen eine gegebene Progression festlegen *

Leonhard Euler

Nachdem irgendeine Progression von Zahlen vorgelegt worden ist

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F \quad \text{etc.}$$

besteht die Frage, die ich hier zu behandelt beschlossen habe, darin, dass eine Reihe solcher Art gefunden wird

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f \quad \text{etc.},$$

in welcher sei

$$ab = A, \quad bc = B, \quad cd = C, \quad de = D, \quad ef = E, \quad fg = F \quad \text{etc.},$$

wo, auch wenn die Zahlen A, B, C, D etc. rational sind und nach einem hinreichend einfachen Gesetz fortschreiten, es meistens zu geschehen pflegt, dass

*Originaltitel: "De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem", erstmals publiziert in „*Opuscula Analytica* 1 1783, pp. 3-47", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 338 - 382 ", Eneström-Nummer E550, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" die Zahlen a, b, c, d etc. sogar im höchsten Maße transzendent werden. Es ist aber ersichtlich, dass die ganze Aufgabe auf einen einzigen Term dieser Reihe zurückgeführt wird, nach Erkennen von welchem alle übrigen sehr leicht bestimmt werden werden; nachdem nämlich der erste a gefunden worden ist, werden sich die übrigen so verhalten:

$$b = \frac{A}{a}, \quad c = \frac{B}{b}, \quad d = \frac{C}{c}, \quad e = \frac{D}{d} \quad \text{etc.}$$

Ich habe aber beobachtet, dass zwei Wege zur Lösung dieses Problems offenstehen, von denen der eine durch Interpolation einer gewissen Reihe beschritten wird, der andere aber, der etwas direkter zu sein scheint, führt zu Kettenbrüchen; weil diese zwei Wege die Aufgabe auf vollkommen verschiedene Weise erledigen, wird ein Vergleich derer nicht zu verachtende Eingenschaften offen legen. Ich möchte also jede der beiden Methoden zunächst einzeln darstellen, darauf folgend werde ich das, was alles gefunden worden ist, miteinander vergleichen.

Die erste auf die Interpolation gestützte Methode

§1 Es werde diese aus der gesuchten auf diese Weise zu bildende Reihe betrachtet

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ a, & ab, & abc, & abcd, & abcde, & abcdef, & abcdefg & \text{etc.} \end{array}$$

welche wegen

$$ab = A, \quad bc = B, \quad cd = C, \quad de = D, \quad ef = E \quad \text{etc.},$$

in diese Form übergehen wird

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ a, & A, & aB, & AC, & aBD, & ACE, & aBDF & \text{etc.} \end{array}$$

deren an den geraden Stellen gesetzt Terme also wegen der gegebenen Progression A, B, C, D etc. per se bekannt sind.

§2 Weil also die Progression aller zweiten Terme

$$A, \quad AC, \quad ACE, \quad ACEG \quad \text{etc.}$$

bekannt ist, wird ihre Interpolation zum wahren Wert des gesuchten Termes a führen. Aber diese Progression ist immer so beschaffen, dass sie ins Unendliche fortgesetzt mit einer einfachen Progression solcher Art vermischt wird, deren Interpolation keiner weiteren Schwierigkeit unterworfen ist. Meistens pflegt aber jene Progression ins Unendliche fortgeführt in die geometrische überzugehen, so dass die mittleren Zwischenterme zwischen je zwei benachbarten zu interpolieren sind.

§3 Wenn wir also die ganze Reihe

$$a, \quad A, \quad aB, \quad AC, \quad aBD, \quad ACE \quad \text{etc.}$$

wie eine geometrische ansehen und daher die Mittelterme definieren, werden wir vielleicht am Anfang sehr stark von der Wahrheit abweichen; aber umso weiter wir fortschreiten, umso näher werden wir an die Wahrheit herankommen, welche wir schließlich im Unendlichen gänzlich erreichen. Daher werden sich die folgenden Bestimmungen immer mehr an den wahren Wert annähern:

$$
\begin{array}{ll}
aa = \dfrac{AA}{B}, & aa = \dfrac{AAC}{BB}, \\
aa = \dfrac{AACC}{BBD}, & aa = \dfrac{AACCE}{BBDD}, \\
aa = \dfrac{AACCEE}{BBDDF}, & aa = \dfrac{AACCEEG}{BBDDFF} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Und es wird, indem tatsächlich bis ins Unendliche fortgeschritten wird, sein

$$aa = A \cdot \frac{AC}{BB} \cdot \frac{CE}{DD} \cdot \frac{EG}{FF} \cdot \frac{GI}{HH} \cdot \frac{IL}{KK} \cdot \text{etc.}$$

§4 Dieser unendliche Ausdruck bietet den wahren Wert von a dar, sooft die Progression der Zahlen A, B, C, D etc. so beschaffen ist, dass die infinitesimalen Terme in einem Verhältnis der Gleichheit zueinander stehen und die Faktoren jenes Ausdruckes schließlich in die Einheiten übergehen. Wie wenn beispielsweise für A, B, C, D etc. die Reihe der natürlichen Zahlen angenommen wird, dass ist

$$ab = 1, \quad bc = 2, \quad cd = 3, \quad de = 4, \quad ef = 5, \quad fg = 6 \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$aa = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{10 \cdot 10} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 12} \cdot \text{etc.}$$

Dieses unendliche Produkt ist aber bekannt, nachdem das Verhältnis des

Durchmessers zur Peripherie $= 1 : \pi$ gesetzt worden ist, $= \frac{2}{\pi}$ zu sein, so dass gilt

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

und daher

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad d = \frac{3\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{etc.}$$

§5 Diese Reihe von transzendenten Zahlen schreiten aber nach einem gewissen Gesetz von Gleichheit voran, welche Zahlen durch Approximation entwickelt zu haben und die Differenzen notiert zu haben, förderlich sein wird:

	Diff. 1	Diff 2	Diff 3
$a = 0,7978846$			
	4554295		
$b = 1,2533141$		1129745	
	3424550		547216
$c = 1,5957691$		582529	
	2842021		217718
$d = 1,8799712$		364811	
	2477210		110319
$e = 2,1276922$		254492	
	2222718		64440
$f = 2,3499640$		190052	
	2032666		41327
$g = 2,5532306$		148725	
	1883941		
$h = 2,7416247$			

Wenn nämlich für a irgendeine andere Zahl angenommen werden würde und aus ihr die folgenden definiert werden würden, würden in den Differenzen riesige Sprünge auftreten.

§6 Auf dieselbe Weise geht die Aufgabe von statten, wenn für die Zahlen A, B, C , D etc. irgendeine arithmetische Progression genommen wird. Es sei nämlich die Reihe a, b, c, d etc. zu suchen, dass gilt

$$ab = p, \quad bc = p+q, \quad cd = p+2q, \quad de = p+3q \quad \text{etc.},$$

und weil die infinitesimalen Terme an das Verhältnis der Gleichheit herankommen, wird sein

$$aa = p \cdot \frac{p(p+2q)}{(p+q)(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(p+2q)}{(p+3q)(p+3q)} \cdot \frac{(p+4q)(p+6q)}{(p+5q)(p+5q)} \cdot \text{etc.},$$

der Wert welches Ausdruckes so durch Integralformeln dargeboten werden kann, dass gilt

$$aa = p \cdot \frac{\int z^{p+q-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{\int z^{p-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}},$$

nachdem nach jeder der beiden Integration $z = 1$ gesetzt worden ist.

§7 Wenn für A, B, C, D etc. eine aus der arithmetischen und harmonischen gemischte Progression angenommen wird, dass eine solche Reihe der Zahlen a, b, c, d, e etc. ausfindig zu machen ist

$$ab = \frac{p}{r}, \quad bc = \frac{p+q}{r+s}, \quad cd = \frac{p+2q}{r+2s}, \quad de = \frac{p+3q}{r+3s} \quad \text{etc.},$$

weil auch die Zahlen A, B, C, D etc. zum Verhältnis der Gleichheit konvergieren, wird sein

$$aa = \frac{p}{r} \cdot \frac{p(r+s)(p+2q)(r+s)}{r(p+q)(r+2s)(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(r+3s)(p+4q)(r+3s)}{(r+2s)(p+3q)(r+4s)(p+3q)} \cdot \text{etc.},$$

deren Wert wie oben erschlossen wird als

$$aa = \frac{p}{r} \cdot \frac{\int z^{p+q-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}} \cdot \int z^{r-1}dz : \sqrt{1-z^{2r}}}{\int z^{p-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}} \cdot \int z^{r+s-1}dz : \sqrt{1-z^{2s}}},$$

wo wiederum nach der Integration $z = 1$ gesetzt werden muss.

§8 Wenn $s = q$ war, kommen die Zahlen A, B, C, D etc. immer näher an die Einheit heran und werden ihr schließlich gleich werden. Daher weil die infinitesimalen Terme der Reihe

$$a, \quad A, \quad aB, \quad AC, \quad aBD, \quad ACE \quad \text{etc.}$$

einander gleich anzusehen sind, wird daher gefolgert werden

$$a = \frac{p}{q} \cdot \frac{(p+2q)(r+q)}{(p+q)(r+2q)} \cdot \frac{(p+4q)(r+3q)}{(p+3q)(r+4q)} \cdot \frac{(p+6q)(r+5q)}{(p+5q)(r+6q)} \cdot \text{etc.},$$

welcher Ausdruck auch so dargestellt werden kann

$$a = \frac{p(r+q)}{r(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(r+3q)}{(r+2q)(p+3q)} \cdot \frac{(p+4q)(r+5q)}{(r+4q)(p+5q)} \cdot \text{etc.},$$

dessen Wert durch Integralformeln ist

$$a = \frac{\int z^{r-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{\int z^{p-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}.$$

§9 Daher kann auch der Fall, in dem s und q ungleich sind, leichter erledigt werden. Es sei nämlich $s = nnq$ und es werde $r = nnt$ gesetzt; dann werde aber festgelegt

$$a = \frac{\alpha}{n}, \quad b = \frac{\beta}{n}, \quad c = \frac{\gamma}{n}, \quad d = \frac{\delta}{n}, \quad e = \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{etc.}$$

und es wird durch die vorgeschriebene Bedingung sein

$$\alpha\beta = \frac{p}{t}, \quad \beta\gamma = \frac{p+q}{t+q}, \quad \gamma\delta = \frac{p+2q}{t+2q}, \quad \delta\varepsilon = \frac{p+3q}{t+3q} \quad \text{etc.}$$

aus deren Übereinstimmung mit der vorhergehenden gilt

$$\alpha = \frac{p(t+q)}{t(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(t+3q)}{(t+2q)(p+3q)} \cdot \frac{(p+4q)(t+5q)}{(t+4q)(p+5q)} \cdot \text{etc.}$$

und daher

$$\alpha = \frac{\int z^{t-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{\int z^{p-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}.$$

§10 Weil also gilt

$$n = \sqrt{\frac{s}{q}}, \quad t = \frac{qr}{s} \quad \text{und} \quad a = \frac{\alpha\sqrt{q}}{\sqrt{s}},$$

wird für den in §7 dargestellten Fall sein

$$a = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{s}} \cdot \frac{p(r+s)}{r(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(r+3s)}{(r+2s)(p+3q)} \cdot \frac{(p+4q)(r+5s)}{(r+4s)(p+5q)} \cdot \text{etc.}$$

und durch Integralformeln

$$a = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\int z^{\frac{qr}{s}-1} dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{\int z^{p-1} dz : \sqrt{1-z^{2q}}};$$

dort, wenn im Zähler z^s für z^q geschrieben werden, wird werden

$$a = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\int z^{r-1} dz : \sqrt{1-z^{2s}}}{\int z^{p-1} dz : \sqrt{1-z^{2q}}},$$

deren Quadrat also notwendigerweise der oben gefundenen Formel gleich wird, so dass ist

$$\frac{s}{q} \cdot \frac{\int z^{r-1} dz : \sqrt{1-z^{2s}}}{\int z^{p-1} dz : \sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{p}{r} \cdot \frac{\int z^{p+q-1} dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{\int z^{r+s-1} dz : \sqrt{1-z^{2s}}}.$$

§11 Die Übereinstimmung dieser Formeln gibt uns also im Fall, in dem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird, den folgenden Lehrsatz an die Hand

$$pq \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} \cdot \int \frac{z^{p+q-1} dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = rs \int \frac{z^{r-1} dz}{\sqrt{1-z^{2s}}} \cdot \int \frac{z^{r+s-1} dz}{\sqrt{1-z^{2s}}},$$

dessen Gültigkeit ich freilich schon anderen Ortes aus anderen Prinzipien bewiesen habe. Daher folgt also, dass durch Nehmen von $r = s = 1$ sein wird

$$pq \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} \cdot \int \frac{z^{p+q-1} dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\pi}{2}$$

wegen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int \frac{zdz}{\sqrt{1-zz}} = 1.$$

§12 Wir wollen einige Beispiele betrachten.

I. Wenn gelten muss

$$ab = 1, \quad bc = 2, \quad cd = 3, \quad de = 4, \quad ef = 5 \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$aa = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \text{etc.}$$

und

$$aa = \frac{\int zdz : \sqrt{1-zz}}{\int dz : \sqrt{1-zz}} = \frac{2}{\pi}.$$

II. Wenn sein muss

$$ab = 1, \quad bc = 3, \quad cd = 5, \quad de = 7, \quad ef = 9 \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$aa = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 13}{11 \cdot 11} \cdot \frac{13 \cdot 17}{15 \cdot 15} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$aa = \frac{\int zzdz : \sqrt{1-z^4}}{\int dz : \sqrt{1-z^4}}.$$

Weil aber aus dem gerade dargestellten Lehrsatz gilt

$$\frac{\pi}{4} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \cdot \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}},$$

wird erschlossen

$$a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

III. Wenn sein muss

$$ab = 1, \quad bc = 4, \quad cd = 7, \quad de = 10, \quad ef = 13 \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$aa = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 13}{10 \cdot 10} \cdot \frac{13 \cdot 19}{16 \cdot 16} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$aa = \frac{\int z^3 dz : \sqrt{1-z^6}}{\int dz : \sqrt{1-z^6}}$$

und daher

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{1-z^6}}.$$

IV. Wenn allgemeiner gelten muss

$$ab = p, \quad bc = p + q, \quad cd = p + 2q, \quad de = p + 3q, \quad ef = p + 4q \quad \text{etc.},$$

werden wir durch eine mit Hilfe des oberen Lehrsatz durchzuführende Reduktion erschließen

$$a = \frac{p\sqrt{2q}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{z^{p+q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} : \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}}.$$

§13 Diese Beispiele sind aus der arithmetischen Progression entnommen worden; diesen wollen wir einige Beispiele hinzufügen, in denen die Progression der Zahlen A, B, C, D etc. aus der arithmetischen und harmonischen gemischt worden ist.

I. Wenn sein muss

$$ab = \frac{1}{2}, \quad bc = \frac{2}{3}, \quad cd = \frac{3}{4}, \quad de = \frac{4}{5}, \quad ef = \frac{5}{6} \quad \text{etc.},$$

wird wegen

$$p = 1, \quad q = 1, \quad r = 2, \quad s = 1$$

sein

$$a = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$a = \frac{\int zdz : \sqrt{1-zz}}{\int dz : \sqrt{1-zz}} = \frac{2}{\pi}.$$

II. Wenn sein muss

$$ab = \frac{1}{2}, \quad bc = \frac{3}{4}, \quad cd = \frac{5}{6}, \quad de = \frac{7}{8}, \quad ef = \frac{9}{10} \quad \text{etc.},$$

wird wegen

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 2, \quad s = 2$$

sein

$$a = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 12}{10 \cdot 11} \cdot \frac{13 \cdot 16}{14 \cdot 15} \cdot \frac{17 \cdot 20}{18 \cdot 19} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$a = \frac{\int zdz : \sqrt{1-z^4}}{\int dz : \sqrt{1-z^4}} = \frac{\pi}{4} : \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

III. Wenn gelten muss

$$ab = \frac{1}{1}, \quad bc = \frac{2}{3}, \quad cd = \frac{3}{5}, \quad de = \frac{4}{7}, \quad ef = \frac{5}{9} \quad \text{etc.},$$

wird wegen

$$p = 1, \quad q = 1, \quad r = 1, \quad s = 2$$

sein

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 11}{9 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 15}{13 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 19}{17 \cdot 10} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$a = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\int dz : \sqrt{1-z^4}}{\int dz : \sqrt{1-zz}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Das Produkt aus diesem Wert und dem vorhergehenden ist aber offenbar $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die andere Methode durch Kettenbrüche

§14 Die zu findende Reihe wollen wir mit Indizes so darstellen

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & n & n+1 \\ a, & b, & c, & d, & e, & \text{etc.} & \dots & x, & y \end{array}$$

und zuerst wollen wir freilich die Reihe ausfindig machen, in welcher sei

$$ab = p, \quad bc = p + q, \quad cd = p + 2q, \quad de = p + 3q \quad \text{etc.,}$$

dass durch die vorhergehende Methode gilt

$$aa = p \cdot \frac{p(p+2q)}{(p+q)(p+q)} \cdot \frac{(p+2q)(p+4q)}{(p+3q)(p+3q)} \cdot \frac{(p+4q)(p+6q)}{(p+5q)(p+5q)} \cdot \text{etc.}$$

und auch

$$aa = p \cdot \frac{\int z^{p+q-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}{z^{p-1}dz : \sqrt{1-z^{2q}}}$$

oder

$$a = \frac{p\sqrt{2q}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{z^{p+q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} : \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}},$$

daher

$$b = \frac{(p+q)\sqrt{2q}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{z^{p+2q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} : \int \frac{z^{p+q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}}$$

und

$$c = \frac{(p+2q)\sqrt{2q}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{z^{p+3q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} : \int \frac{z^{p+2q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}}$$

und daher

$$d = \frac{(p+nq)\sqrt{2q}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{z^{p+(n+1)q-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} : \int \frac{z^{p+nq-1}dz}{\sqrt{1-z^{2q}}}.$$

§15 Weil also für diese Reihe im Allgemeinen gilt

$$xy = p + nq$$

muss die Größe x eine Funktion solcher Art des Index' n sein, dass, nachdem in ihr $n+1$ anstelle von n gesetzt worden ist, y hervorgeht und das Produkt dann wird

$$xy = p + nq;$$

weil dies rationalen Werten widerspricht, ist es passend, die Werte der Quadrate xx und yy aus dieser Gleichung zu suchen

$$xxyy = pp + 2npq + nnqq,$$

weil sich jenes Verhältnis der Funktionen ja auch auf die Quadrate bezieht. Diese Untersuchung wird also angenehm weiter auf die Auflösung dieser Gleichung ausgedehnt werden

$$xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma;$$

daher kann der Wert von xx auf mehrere Weisen auf Kettenbrüche reduziert werden, welche in den folgenden Lemmata aufgezählt werden.

LEMMA I

Nach Vorlegen dieser Gleichung

$$(X + \lambda n + \mu)(Y + \lambda n + \nu) = \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta,$$

in welcher Y genauso aus $n+1$ wie X aus n definiert wird, werde festgelegt

$$X + \lambda n + \mu = \zeta n \ + f + \frac{k}{X'},$$

und

$$Y + \lambda n + \nu = \zeta n \ + g + \frac{k}{Y'},$$

dass ist

$$X = (\zeta - \lambda)n + f - \mu + \frac{k}{X'},$$

und

$$Y = (\zeta - \lambda)n + g - \nu + \frac{k}{Y'},$$

wo nun X' und Y' neue ähnliche Brüche von n und $n+1$ sind; und es ist notwendig, dass gilt

$$g - \nu = \zeta - \lambda + f - \mu \quad \text{oder} \quad g = \zeta - \lambda - \mu + \nu + f.$$

§17 Nachdem dies festgelegt worden ist, geht die vorgeschriebene Gleichung in diese über

$$\begin{aligned} \zeta\zeta nn + \zeta(f+g)n + fg + \frac{k(\zeta n + f)}{Y'} + \frac{k(\zeta n + g)}{X'} + \frac{kk}{X'Y'} \\ = \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta. \end{aligned}$$

Es werde festgelegt

$$f + g = 2\eta \quad \text{und} \quad k = fg - \theta,$$

dass hervorgeht

$$X'Y' + (\zeta n + f)X' + (\zeta n + g)Y' + fg - \theta = 0$$

oder

$$(X' + \zeta n + g)(Y' + \zeta n + f) = \zeta\zeta nn + \zeta(f + g)n + \theta,$$

welche der vorgelegten Form ähnlich ist. Aber wegen $f + g = 2\eta$ wird man haben

$$\zeta - \lambda - \mu + \nu + 2f = 2\eta,$$

und

$$f = \eta + \frac{\lambda - \zeta + \mu - \nu}{2}$$

und

$$g = \eta - \frac{\lambda - \zeta + \mu - \nu}{2}$$

und daher

$$k = fg - \theta = \eta\eta - \frac{1}{4}(\lambda - \zeta + \mu - \nu)^2 - \theta.$$

§18 Deswegen wird die vorgelegte Gleichung

$$(X+\lambda n+\nu)(Y+\lambda n+\nu)=\zeta\zeta nn+2\zeta\eta n+\theta$$

mit Hilfe dieser Substitution

$$X=(\zeta-\lambda)+\eta+\frac{\lambda-\zeta-\mu-\nu}{2}+\frac{\eta\eta-\frac{1}{4}(\lambda-\zeta+\mu-\nu)^2-\theta}{X'},$$
$$Y=(\zeta-\lambda)+\eta-\frac{\lambda-\zeta+\mu+\nu}{2}+\frac{\eta\eta-\frac{1}{4}(\lambda-\zeta+\mu-\nu)^2-\theta}{Y'}$$

auf diese der vorgelegten ähnliche Gleichung zurückgeführt

$$\left(X'+\zeta n+\eta-\frac{\lambda-\zeta+\mu-\nu}{2}\right)\left(Y'+\zeta n+\eta+\frac{\lambda-\zeta+\mu-\nu}{2}\right)$$
$$=\zeta\zeta nn+2\zeta\eta n+\theta.$$

§19 Auf die gleiche Weise wird auch dieselbe vorgelegte Gleichung

$$(X+\lambda n+\mu)(Y+\lambda n+\nu)=\zeta\zeta nn+2\zeta\eta n+\theta$$

nach diesen Substitutionen

$$X=(\zeta-\lambda)+\eta+\frac{\lambda-\zeta-\mu-\nu}{2}+\frac{\frac{1}{4}(\lambda-\zeta+\mu-\nu)^2-\eta\eta+\theta}{X'},$$
$$Y=(\zeta-\lambda)+\eta-\frac{\lambda-\zeta+\mu+\nu}{2}+\frac{\frac{1}{4}(\lambda-\zeta+\mu-\nu)^2-\eta\eta+\theta}{Y'}$$

auf diese ihr ähnliche zurückgeführt

$$\left(X' - \zeta n - \eta + \frac{\lambda - \zeta + \mu - \nu}{2}\right)\left(Y' - \zeta n - \eta + \frac{\lambda - \zeta + \mu - \nu}{2}\right)$$
$$= \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta.$$

Lemma II

Nach Vorlegen dieser Gleichung

$$(X + \lambda n + \mu)(Y + \lambda n + \nu) = \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta,$$

in welcher Y genauso von $n+1$ wie X von n abhängt, werde festgelegt

$$X + \lambda n + \mu = \zeta n f + \frac{hn + k}{X'},$$
$$Y + \lambda n + \nu = \zeta n f + \frac{hn + h + k}{Y'},$$

wo wegen der Ähnlichkeit der Funktionen wie zuvor gelten muss

$$g = \zeta - \lambda - \mu + \nu + f.$$

§21 Weiter werden wir nach der Substitution dieser Werte haben

$$\zeta\zeta nn + \zeta(f+g)n + fg + \frac{(\zeta n+f)(hn+h+k)}{Y'} + \frac{(\zeta n+g)(hn+k)}{X'}$$
$$+\frac{(hn+k)(hn+h+k)}{X'Y'} = \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta,$$

woher wird

$$(\zeta(f+g-2\eta)n + fg - \theta)X'Y' + (\zeta n+f)(hn+h+k)X'$$
$$+(\zeta n+g)(hn+k)Y' + (hn+k)(hn+h+k) = 0,$$

welcher Größe also entweder $hn+k$ oder $hn+h+k$ oder ein Vielfaches gleich gesetzt werden muss.

§22 Es sei zuerst

$$hn+k = \alpha\zeta(f+g-2\eta)n + \alpha(fg-\theta)$$

und $\zeta n + f$ muss ein Subvielfaches von $\zeta(f+g-2\eta)n + fg - \theta$ sein; daher wird

$$f(f+g-2\eta) = fg - \theta \quad \text{oder} \quad ff = 2\eta f - \theta$$

und daher

$$f = \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta} \quad \text{und} \quad g = \zeta - \lambda - \mu + \nu + \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta};$$

daraus weiter

$$h = \alpha\zeta(f+g-2\eta) \quad \text{und} \quad k = \alpha(fg-\theta),$$

und die resultierende Gleichung wird werden

$$\begin{gathered}X'Y' + \frac{\alpha\zeta(f+g-2\eta)n + \alpha\zeta(f+g-2\eta) + \alpha(fg-\theta)}{f+g-2\eta}X' \\ +\alpha(\zeta n + g)Y' + \alpha\alpha(\zeta(f+g-2\eta)n + \zeta(f+g-2\eta) + fg - \theta) = 0.\end{gathered}$$

§23 Um die Brüche zu beseitigen, wollen wir setzen

$$\alpha = f+g-2\eta = \zeta - \lambda - \mu + \nu + 2\sqrt{\eta\eta - \theta}$$

und so wird werden

$$\begin{gathered}X'Y' + (\zeta(f+g-2\eta)n + \zeta(f+g-2\eta) + fg - \theta)X' \\ +(\zeta(f+g-2\eta)n + g(f+g-2\eta))Y' \\ +(f+g-2\eta)^2(\zeta(f+g-2\eta)n + \zeta(f+g-2\eta) + fg - \theta) = 0.\end{gathered}$$

Aber wenn wir uns nicht um die Brüche kümmern, werden wir haben

$$X'Y' + \alpha\left(\zeta n + \zeta + \frac{fg-\theta}{f+g-2\eta}\right)X' + \alpha(\zeta n + g)Y'$$

$$+\alpha\alpha(f+g-2\eta)\left(\zeta n + \zeta + \frac{fg-\theta}{f+g-2\eta}\right) = 0,$$

welche, nachdem der Kürze wegen festgelegt worden ist

$$\frac{fg-\theta}{f+g-2\eta}=\varepsilon,$$

auf diese der vorgelegten ähnliche zurückgeführt wird

$$\begin{gathered}(X'+\alpha(\zeta n+g))(Y'+\alpha(\zeta n+\zeta+\varepsilon))\\ =\alpha\alpha(\zeta\zeta nn+\zeta(\zeta+\varepsilon-f+2\eta)+(\zeta+\varepsilon)(2\eta-f))\\ =\alpha\alpha(\zeta n+\zeta+\varepsilon)(\zeta n+2\eta-f).\end{gathered}$$

§24 Wenn also nach Vorlegen der Gleichung

$$(X+\lambda b+\mu)(Y+\lambda n+\nu)=\zeta\zeta nn+2\zeta\eta n+\theta$$

der Kürze wegen festgelegt wird

$$f=\eta+\sqrt{nn-\theta},\quad g=\zeta-\lambda-\mu+\nu+\eta+\sqrt{\eta\eta-\theta}$$

sowie

$$\frac{fg-\theta}{f+g-2\eta}=\varepsilon,$$

wird die folgende Substitution

$$X = (\zeta - \lambda)n + f - \mu + \frac{\zeta(f+g-2\eta)n + fg - \theta}{X'},$$

$$Y = (\zeta - \lambda)n + g - \nu + \frac{\zeta(f+g-2\eta)(n+1) + fg - \theta}{Y'}$$

die folgende der vorgelegten ähnliche Gleichung an die Hand geben

$$(X' + \zeta n + g)(Y' + \zeta(n+1) + \varepsilon)$$
$$= \zeta\zeta nn + \zeta(\zeta + \varepsilon - f + 2\eta)n + (\zeta + \varepsilon)(2\eta - f).$$

§25 So wie wir hier $\alpha = 1$ genommen haben, so wird die Festlegung $\alpha = -1$, während die Abkürzungen dieselben bleiben, diese Substitution geben

$$X = (\zeta - \lambda)n + f - \mu + \frac{\zeta(2\eta - f - g)n - fg + \theta}{X'},$$

$$Y = (\zeta - \lambda)n + g - \nu + \frac{\zeta(2\eta - f - g)(n+1) - fg + \theta}{Y'},$$

woher diese der vorgelegten ähnliche Gleichung entspringt

$$(X' - \zeta n - g)(Y' - \zeta(n+1) - \varepsilon)$$
$$= \zeta\zeta nn + \zeta(\zeta + \varepsilon - f + 2\eta)n + (\zeta + \varepsilon)(2\eta - f).$$

§26 Wir wollen weiter festlegen, dass gilt

$$hn + h + k = \zeta(f + g - 2\eta)n + fg - \theta,$$

dass gilt

$$h = \zeta(f + g - 2\eta) \quad \text{und} \quad k = fg - \theta - \zeta(f + g - 2\eta),$$

und es ist notwendig, dass wird

$$\zeta(f + g - 2\eta)n + fg - \theta = (f + g - 2\eta)(\zeta n + g)$$

und daher

$$g(f + g - 2\eta) = fg - \theta \quad \text{oder} \quad g = \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta}$$

und daraus

$$f = \lambda - \zeta + \mu - \nu + \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta}.$$

Die resultierende Gleichung wird aber sein

$$\begin{aligned} X'Y' + (\zeta n + f)X' + \left(\zeta n - \zeta + \frac{fg - \theta}{f + g - 2\eta}\right)Y' \\ +(f + g - 2\eta)\left(\zeta(n-1) + \frac{fg - \theta}{f + g - 2\eta}\right) = 0, \end{aligned}$$

welche nach Setzen von $\frac{fg-\theta}{f+g-2\eta} = \varepsilon$ in diese übergeht

$$
\begin{aligned}
&(X' + \zeta n - \zeta + \varepsilon)(Y' + \zeta n + f) \\
&= \zeta\zeta nn + \zeta n(2\eta - g - \zeta + \varepsilon) + (\varepsilon - \zeta)(2\eta - g) \\
&= (\zeta n - \zeta + \varepsilon)(\zeta n + 2\eta - g).
\end{aligned}
$$

§27 Wenn also nach Vorlegen der Gleichung

$$(X + \lambda n + \mu)(Y + \lambda n + \nu) = \zeta\zeta nn + 2\zeta\eta n + \theta$$

der Kürze wegen festgelegt wird

$$f = \lambda - \zeta + \mu - \nu + \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta}, \quad g = \eta + \sqrt{\eta\eta - \theta}$$

sowie

$$\varepsilon = \frac{fg - \theta}{f + g - 2\eta},$$

wird die folgende Substitution

$$
\begin{aligned}
X &= (\zeta - \lambda)n + f - \mu + \frac{\zeta(f + g - 2\eta)(n - 1) + fg - \theta}{X'}, \\
Y &= (\zeta - \lambda)n + g - \nu + \frac{\zeta(f + g - 2\eta)n + fg - \theta}{Y'}
\end{aligned}
$$

diese der vorgelegten ähnliche Gleichung liefern

$$(X' + \zeta n - \zeta + \varepsilon)(Y' + \zeta n + f)$$

$$= \zeta\zeta nn + \zeta(2\eta - g - \zeta + \varepsilon)n + (\varepsilon - \zeta)(2\eta - g).$$

§28 Auf die gleiche Weise, während die Abkürzungen dieselben bleiben, wird dieselbe vorgelegte Gleichung mit Hilfe dieser Substitutionen

$$X = (\zeta - \lambda)n + f - \mu + \frac{\zeta(2\eta - f - g)(n-1) - fg + \theta}{X'},$$
$$Y = (\zeta - \lambda)n + g - \nu + \frac{\zeta(2\eta - f - g)n - fg + \theta}{Y'}$$

auf diese der vorgelegten ähnliche Gleichung zurückgeführt

$$\begin{aligned}&(X' - \zeta n + \zeta - \varepsilon)(Y' - \zeta n - f)\\ &= \zeta\zeta nn + \zeta(2\eta - g - \zeta + \varepsilon)n + (\varepsilon - \zeta)(2\eta - g).\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser sechs in § 18, 19, 24, 25, 27, 28 angegebenen Reduktionen werden alle Gleichungen von dieser Art auf unendlich viele Weisen durch Kettenbrüche aufgelöst werden können.

Auflösung der Gleichung $xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$ durch § 18

Weil hier ist

$$X = xx, \quad Y = yy, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \zeta = \alpha, \quad \eta = \beta \quad \text{und} \quad \theta = \gamma,$$

wird die Substitution hervorgehen

$$xx = \alpha + \beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{X'},$$
$$yy = \alpha + \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{Y'},$$

welche Gleichung zu dieser zweiten Gleichung führt

$$\left(X' + \alpha n + \beta + \frac{1}{2}\alpha\right)\left(Y' + \alpha n + \beta - \frac{1}{2}\alpha\right)$$
$$= \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta b + \gamma.$$

§30 Um diese auf die gleiche Weise aufzulösen, werden wir wegen

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \beta + \frac{1}{2}\alpha, \quad \nu = \beta - \frac{1}{2}\alpha, \quad \zeta = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \theta = \gamma$$

diese Substitution erlangen

$$X' = 0 + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{X''}, \quad Y' = 0 + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{Y''}.$$

die zu dieser dritten Gleichung führt

$$\left(X'' + \alpha n + \beta - \frac{1}{2}\alpha\right)\left(Y'' + \alpha n + \beta + \frac{1}{2}\alpha\right)$$
$$\alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma.$$

Diese liefert aber weiter diese Substitutionen

$$X'' = 0 + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{X'''} \quad \text{und} \quad Y'' = 0 + \frac{\beta\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha - \gamma}{Y'''},$$

woher wegen $X''' = X'$ und $Y''' = Y'$ nichts Weiteres geschlossen werden kann.

AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$ DURCH § 19

§31 Nach diesen Substitutionen

$$xx = \alpha n - \frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{X},$$
$$yy = \alpha n + \frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{Y}$$

wird zu dieser Gleichung gelangt

$$\left(X - \alpha n - \frac{1}{2}\alpha - \beta\right)\left(Y - \alpha n + \frac{1}{2}\alpha - \beta\right)$$
$$\alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma,$$

welche gemäß § 19 reduziert wegen

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = -\frac{1}{2}\alpha - \beta, \quad \nu = \frac{1}{2}\alpha - \beta,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \theta = \gamma$$

diese Substitutionen gibt

$$X = 2\alpha n - \alpha + 2\beta + \frac{\frac{9}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{X'},$$
$$Y = 2\alpha n + \alpha + 2\beta + \frac{\frac{9}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{Y'},$$

woher diese neue Gleichung entsprießt

$$\left(X' - \alpha n - \frac{3}{2}\alpha - \beta\right)\left(Y' - \alpha n + \frac{3}{2}\alpha - \beta\right)$$
$$= \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma.$$

§32 Diese Gleichung werde weiter reduziert und wegen

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = -\frac{3}{2}\alpha - \beta, \quad \nu = \frac{3}{2}\alpha - \beta,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \theta = \gamma$$

werden wir diese Substitutionen haben

$$X' = 2\alpha n - \alpha + 2\beta + \frac{\frac{25}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{X''},$$
$$Y' = 2\alpha n + \alpha + 2\beta + \frac{\frac{25}{4}\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma}{Y''},$$

und daher diese neue Gleichung

$$\left(X'' - \alpha n - \frac{5}{2}\alpha - \beta\right)\left(Y'' - \alpha n + \frac{5}{2}\alpha - \beta\right)$$
$$= \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma,$$

woher die folgenden Substitutionen leicht erschlossen werden.

§33 Wenn daher also, um abzukürzen, festgelegt wird

$$\alpha n - \frac{1}{2}\alpha + \beta = N \quad \text{und} \quad \beta\beta - \gamma = B,$$

wird der Wert von xx mit dem folgenden Kettenbruch ausgedrückt werden

$$xx = N + \cfrac{\frac{1}{4}\alpha\alpha - B}{2N + \cfrac{\frac{9}{4}\alpha\alpha - B}{2N + \cfrac{\frac{25}{4}\alpha\alpha - B}{2N + \cfrac{\frac{49}{4}\alpha\alpha - B}{2N + \cfrac{\frac{81}{4}\alpha\alpha - B}{2N + \text{etc.}}}}}}$$

welcher der vorgelegten Gleichung zukommt, natürlich

$$xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma.$$

AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$ DURCH § 24

§34 Weil hier ist

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \zeta = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \theta = \gamma,$$

wird sein

$$f = \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma}, \quad g = \alpha + \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma},$$

daher

$$fg - \theta = \alpha\beta + 2\beta\beta - 2\gamma + (\alpha + 2\beta)\sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

und

$$f + g - 2\eta = \alpha + 2\sqrt{\beta\beta - \gamma}.$$

Es werde also festgelegt

$$\frac{fg - \theta}{f + g - 2\eta} = \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma} = \varepsilon,$$

so dass gilt

$$\varepsilon = f \quad \text{und} \quad g = \alpha + f,$$

woher diese Substitutionen entspringen

$$xx = \alpha n + f + \frac{(f + g - 2\eta)(\alpha n + f)}{X} = (\alpha n + f)\left(1 + \frac{\alpha + 2\sqrt{\beta\beta - \gamma}}{X}\right),$$

$$yy = \alpha n + g + \frac{(f + g - 2\eta)(\alpha n + g)}{Y} = (\alpha n + g)\left(1 + \frac{\alpha + 2\sqrt{\beta\beta - \gamma}}{Y}\right),$$

und daher diese neue Gleichung

$$(X + \alpha n + g)(Y + \alpha n + \alpha + f)$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(\alpha + 2\beta)n + (\alpha + f)(2\beta - f).$$

§35 Wir wollen festlegen

$$\beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma} = \delta,$$

dass ist

$$f = \delta, \quad g = \alpha + \delta \quad \text{und} \quad f + g - 2\eta = \alpha - 2\beta + 2\delta,$$

und so werden die Substitutionen

$$xx = \alpha n + \delta + \frac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha + \delta)}{X},$$
$$yy = \alpha(n+1) + \delta + \frac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha(n+1) + \delta)}{Y}$$

diese Gleichung geben

$$(X + \alpha + \alpha + \delta)(Y + \alpha n + \alpha + \delta)$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(\alpha + 2\beta)n + (\alpha + \delta)(2\beta - \delta).$$

§36 Für die Reduktion dieser Gleichung ist

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \alpha + \delta, \quad \nu = \alpha + \delta,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \beta + \frac{1}{2}\alpha, \quad \theta = (\alpha + \delta)(2\beta - \delta),$$

woher wegen

$$ff - (2\beta + \alpha)f + [\alpha + \delta)(2\beta - \delta) = 0$$

entweder gelten wird

$$f = \alpha + \delta$$

oder auch

$$f = 2\beta - \delta;$$

aber die erste Festlegung führt nicht weiter, wohingegen durch Gebrauchen der zweiten sein wird

$$f = 2\beta - \delta, \quad g = 2\beta - \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = 2\beta - \delta,$$

und so werden diese Substitutionen erhalten werden

$$X = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta - \delta)}{X'},$$
$$Y = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha(n+1) + 2\beta - \delta)}{Y'}$$

welche diese Gleichung liefern

$$\begin{gathered}(X' + \alpha n + 2\beta - \delta)(Y' + \alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)\\ = \alpha\alpha nn + 2\alpha(\alpha + \beta)n + (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta).\end{gathered}$$

§37 Nun ist also

$$\begin{gathered}\lambda = \alpha, \quad \mu = 2\beta - \delta, \quad \nu = \alpha + 2\beta - \delta,\\ \zeta = \alpha, \quad \zeta = \alpha + \beta, \quad \theta = (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta),\end{gathered}$$

woher wegen

$$ff - 2(\alpha + \beta)f + (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta) = 0$$

dieser Wert genommen werde

$$f = \alpha + 2\beta - \delta;$$

es wird sein

$$g = 2\alpha + 2\beta - \delta$$

sowie

$$\varepsilon = \frac{(\alpha + 2\beta - \delta)(\alpha + 2\beta - 2\delta)}{\alpha + 2\beta - 2\delta} = \alpha + 2\beta - \delta.$$

Daher wird diese Substitution

$$X' = \alpha + \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{X''},$$
$$Y' = \alpha + \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)}{Y''}$$

diese Gleichung geben

$$(X'' + \alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)(Y'' + \alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(3\alpha + 2\beta)n + (2\alpha + 2\beta - \delta)(\alpha + \delta).$$

§38 Wenn wir den anderen Wert gebrauchen, also

$$f = \alpha + \delta,$$

wird

$$g = 2\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = \alpha + \delta$$

und werden nach der Substitution

$$X' = \alpha - 2\beta + 2\delta + \frac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{X''},$$
$$Y' = \alpha - 2\beta + 2\delta + \frac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{Y''}$$

diese Gleichung erlangen

$$\begin{aligned}&(X'' + \alpha n + 2\alpha + \delta)(Y'' + \alpha n + 2\alpha + \delta)\\&= \alpha\alpha nn + \alpha(3\alpha + 2\beta)n + (2\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta).\end{aligned}$$

§39 Wir wollen diese letzte Gleichung weiter verfolgen, weil sie der zweiten ähnlicher ist, weil sie aus ihr durch Setzen von $\delta + \alpha$ für δ und $\beta + \alpha$ für β entsprießt, woher diese Substitution hervorgeht

$$X'' = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + \alpha - \delta)}{X'''},$$
$$Y'' = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + 2\alpha - \delta)}{Y'''},$$

welche zu dieser Gleichung führt

$$\begin{aligned}&(X''' + \alpha n + 2\beta + \alpha - \delta)(Y''' + \alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)\\&= \alpha\alpha nn + 2\alpha(2\alpha + \beta)n + (2\alpha + \delta)(2\alpha + 2\beta - \delta).\end{aligned}$$

§40 Diese Gleichung wird weiter wie in §38 behandelt mit Hilfe dieser Substitutionen

$$X''' = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + 2\alpha - \delta)}{X''''},$$
$$Y''' = 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + 3\alpha - \delta)}{Y''''},$$

auf diese zurückgeführt

$$
\begin{aligned}
&(X'''' + \alpha n + 3\alpha + \delta)(Y'''' + \alpha n + 3\alpha + 2\beta + \delta)\\
&= \alpha\alpha nn + \alpha(5\alpha + 2\beta)n + (3\alpha + \delta)(2\alpha + 2\beta - \delta)
\end{aligned}
$$

und diese wird weiter durch diese Substitutionen

$$
\begin{aligned}
X'''' &= 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + 2\alpha - \delta)}{X'''''},\\
Y'''' &= 2\beta - \alpha - 2\delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + 2\beta + 3\alpha - \delta)}{Y'''''},
\end{aligned}
$$

auf diese zurückgeführt

$$
\begin{aligned}
&(X''''' + \alpha n + 2\beta + 2\alpha - \delta)(Y''''' + \alpha n + 3\alpha + 2\beta - \delta)\\
&= \alpha\alpha nn + 2\alpha(3\alpha + \beta)n + (3\alpha + \delta)(3\alpha + 2\beta - \delta).
\end{aligned}
$$

§41 Daher wird also der Wert von xx aus dieser Gleichung

$$xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma,$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt worden ist

$$\beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma} = \delta \quad \text{und} \quad \alpha - 2\beta + 2\delta = A,$$

sein

$$xx = \alpha n + \delta + \cfrac{A(\alpha n + \delta)}{-A - \cfrac{A(\alpha n + 2\beta - \delta)}{A + \cfrac{A(\alpha n + \alpha + \delta)}{-A - \cfrac{A(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{A + \cfrac{A(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{-A - \cfrac{A(\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)}{A + \cfrac{A(\alpha n + 3\alpha + \delta)}{-A - \cfrac{A(\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \delta)}{A + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Dieser Ausdruck liefert aber für xx jenes aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkt selbst, was durch die erste Methode gefunden wird.

§42 Dieser Kettenbruch kann leichter auf diese Weise ausgedrückt werden

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{\alpha n + \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 2\beta - \delta}{A - \cfrac{\alpha n + \alpha + \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta}{A - \cfrac{\alpha n + 2\alpha + \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta}{A - \cfrac{\alpha n + 3\alpha + \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \delta}{A - \cfrac{\alpha n + 4\alpha + \delta}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

Wenn aber die Formeln aus § 37 auf diese Weise weiter reduziert werden, wird dieser am Anfang unregelmäßige Ausdruck gefunden

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{\alpha n + \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 2\beta - \delta}{\alpha - \cfrac{\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + \alpha + \delta}{A - \cfrac{\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 2\alpha + \delta}{A - \cfrac{\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \delta}{1 + \cfrac{\alpha n + 3\alpha + \delta}{A - \text{etc.}}}}}}}}}$$

§43 Wenn jeder der beiden Ausdrücke um den gemeinsamen Kopf beschnitten wird, für 2β der angenommene Wert $\alpha + 2\delta - A$ eingesetzt wird und darüber hinaus N für $\alpha n + \alpha + \delta$ geschrieben wird, wird man diese Gleichheit haben

$$A - \cfrac{N}{1 + \cfrac{N + \alpha - A}{A - \cfrac{N + \alpha}{1 + \cfrac{N + 2\alpha - A}{A - \cfrac{N + 2\alpha}{1 + \cfrac{N + 3\alpha - A}{A - \text{etc.}}}}}}} = \alpha - \cfrac{N + \alpha - A}{1 + \cfrac{N}{A - \cfrac{N + 2\alpha - A}{1 + \cfrac{N + \alpha}{A - \cfrac{N + 3\alpha - A}{1 + \cfrac{N + 2\alpha}{A - \text{etc.}}}}}}}$$

wo für A, α und N irgendwelche Zahlen angenommen werden können.

Auflösung der Gleichung $xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$ mit Hilfe von § 25

§44 Die erste aus der vorhergehenden Auflösung, indem X und Y negativ genommen werden, hergeholte Substitution [§ 35]

$$xx = \alpha n + \delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + \delta)}{X},$$

$$yy = \alpha(n+1) + \delta + \frac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{Y}$$

führt nach Setzen von

$$\delta = \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

zu dieser Gleichung

$$\begin{gathered}(X - \alpha n - \alpha - \delta)(Y - \alpha n - \alpha - \delta) \\ = \alpha\alpha nn + \alpha(\alpha + 2\beta)n + (\alpha + \delta)(2\beta - \delta),\end{gathered}$$

die mit § 24 verglichen liefert

$$\begin{gathered}\lambda = -\alpha, \quad \mu = -\alpha - \delta, \quad \nu = -\alpha - \delta, \\ \zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{1}{2}\alpha + \beta, \quad \theta = (\alpha + \delta)(2\beta - \delta),\end{gathered}$$

woher erschlossen wird

$$ff - (\alpha + 2\beta)f + (\alpha + \delta)(2\beta - \delta) = 0.$$

Es sei

$$f = \alpha + \delta;$$

es wird sein

$$g = 3\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = \alpha + \delta$$

und daher entsprießt diese Substitution

$$\begin{aligned} X &= 2\alpha n + 2\alpha + 2\delta - \frac{(2\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{X'}, \\ Y &= 2\alpha n + 4\alpha + 2\delta - \frac{(2\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{Y'}, \end{aligned}$$

die zu dieser Gleichung führt

$$\begin{aligned} &(X' - \alpha n - 3\alpha - \delta)(Y' - \alpha n - 2\alpha - \delta) \\ &= \alpha\alpha nn + \alpha(2\alpha + 2\beta)n + (2\alpha + \delta)(2\beta - \delta). \end{aligned}$$

§45 Diese Gleichung werde auf die gleiche Weise gemäß § 24 behandelt und wegen der Werte

$$\begin{gathered} \lambda = -\alpha, \quad \mu = -3\alpha - \delta, \quad \nu = -2\alpha - \delta, \\ \zeta = \alpha, \quad \eta = \alpha + \beta, \quad \theta = (2\alpha + \delta)(2\beta - \delta) \end{gathered}$$

wird sein

$$ff - (2\alpha + 2\beta)f + (2\alpha + \delta)(2\beta - \delta) = 0,$$

woher genommen werde

$$f = 2\alpha + \delta,$$

und es werde

$$g = 5\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = 2\alpha + \delta.$$

Man wird also diese Substitution haben

$$\begin{aligned} X' &= 2\alpha n + 5\alpha + 2\delta - \frac{(5\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{X''}, \\ Y' &= 2\alpha n + 7\alpha + 2\delta - \frac{(5\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 3\alpha + \delta)}{Y''}, \end{aligned}$$

welche diese Gleichung liefern

$$\begin{gathered} (X'' - \alpha n - 5\alpha - \delta)(Y'' - \alpha n - 3\alpha - \delta) \\ = \alpha\alpha nn + \alpha(3\alpha + 2\beta)n + (3\alpha + \delta)(2\beta - \delta). \end{gathered}$$

§46 Nun wird also auf dieselbe Weise sein

$$\begin{gathered} \lambda = -\alpha, \quad \mu = -5\alpha - \delta, \quad \nu = -3\alpha - \delta, \\ \zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{3}{2}\alpha + \beta, \quad \theta = (3\alpha + \delta)(2\beta - \delta), \end{gathered}$$

woher wegen

$$f = 3\alpha + \delta$$

erschlossen wird

$$g = 7\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = 3\alpha + \delta.$$

Also wird die Substitution

$$\begin{aligned}
X'' &= \alpha n \;+\;\;\; 8\alpha + 2\delta - \frac{(7\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 3\alpha + \delta)}{X'''},\\
Y'' &= 2\alpha n + 10\alpha + 2\delta - \frac{(7\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 4\alpha + \delta)}{Y'''},
\end{aligned}$$

diese Gleichung geben

$$(X''' - \alpha n - 7\alpha - \delta)(Y''' - \alpha n - 4\alpha - \delta)$$

§47 Weil das Fortschreitungsgesetz hinreichend offenbar ist, wird leicht gefolgert, dass sein wird

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{2\alpha n + 2\alpha + 2\delta - \cfrac{(3\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{2\alpha n + 5\alpha + 2\delta - \cfrac{(5\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{2\alpha n + 8\alpha + 2\delta - \cfrac{(7\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 3\alpha + \delta)}{2\alpha n + 11\alpha + 2\delta - \text{etc.}}}}}$$

wo es zu bemerken ist, dass aus der vorgelegten Gleichung

$$xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$$

δ auf zweifache Weise gegeben ist, weil gilt

$$\delta = \beta \pm \sqrt{\beta\beta - \gamma},$$

und so werden zwei Reihen solcher Art erhalten, von welchen die eine hervorgegangen wäre, wenn wir überall für f die anderen Werte angenommen hätten.

Eine andere Lösung durch Alternieren der Werte von f

§48 Wir wollen in der Auflösung von § 44 dies annehmen

$$f = 2\beta - \delta,$$

dass ist

$$g = 2\alpha + 2\beta - \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = 2\beta - \delta;$$

die Substitution wird diese sein

$$X = 2\alpha n + \ \alpha + 2\beta - \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\beta - \delta)}{X'},$$
$$Y = 2\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{Y'},$$

woher diese Gleichung resultiert

$$\begin{aligned}(X' - \alpha n - 2\alpha - 2\beta + \delta)(Y' - \alpha n - \alpha - 2\beta + \delta)\\ = \alpha\alpha nn + \alpha(2\alpha + 2\beta)n + (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta),\end{aligned}$$

welche aus der oberen entspringt, wenn dort $-\alpha + 2\beta - \delta$ für δ geschrieben wird, unter Beibehalt welches Wertes im folgenden werden wird

$$xx = \alpha + \delta - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{2\alpha n + \alpha + 2\beta - \cfrac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 3\alpha + 4\beta - 2\delta - \cfrac{(3\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 6\alpha + 4\beta - 2\delta - \cfrac{(5\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 9\alpha + 4\beta - 2\delta - \text{etc.}}}}}$$

§49 Aber die gerade gefundene Gleichung gibt mit § 25 verglichen

$$\begin{aligned}\lambda = -\alpha, \quad \mu = -2\alpha - 2\beta + \delta, \quad \nu = -\alpha - 2\beta + \delta.\\ \zeta = \alpha, \quad \eta = \alpha + \beta, \quad \theta = (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta)\end{aligned}$$

und

$$ff - 2(\alpha + \beta)f + (\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta) = 0.$$

Wenn wir nun nehmen würden

$$f = \alpha + 2\beta - \delta,$$

hätten wir die gerade gefundene Formel. Es sei also

$$f = \alpha + \delta;$$

es wird sein

$$g = 4\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = \alpha + \delta,$$

und daher

$$\begin{aligned}
X' &= 2\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \frac{(3\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{X''},\\
Y' &= 2\alpha n + 5\alpha + 2\beta - \frac{(3\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + \delta)}{Y''}
\end{aligned}$$

und daraus entsprießt die Gleichung

$$\begin{gathered}
(X'' - \alpha n - 4\alpha - \delta)(Y'' - \alpha n - 2\alpha - \delta)\\
= \alpha\alpha nn + \alpha(3\alpha + 2\beta)n + (2\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta),
\end{gathered}$$

welche aus der vorhergehenden [§ 45] entspringt, wenn dort $-\alpha + \delta$ für δ geschrieben wird; und so wird sein

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{2\alpha n + \alpha + 2\beta - \cfrac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \cfrac{(3\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{2\alpha n + 6\alpha + 2\delta - \text{etc.}}}}$$

§50 Aber jene Gleichung gibt auf die andere Weise aufgelöst wegen der Werte

$$\begin{gathered}\lambda = -\alpha, \quad \mu = -4\alpha - \delta, \quad \nu = -2\alpha - \delta, \\ \zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{3}{2}\alpha + \beta, \quad \theta = (2\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta)\end{gathered}$$

dies

$$ff - (3\alpha + 2\beta)f + (2\alpha + \delta)(\alpha + 2\beta - \delta) = 0;$$

daher wollen wir nun nehmen

$$f = \alpha + 2\beta - \delta,$$

dass ist

$$\begin{aligned} X'' &= 2\alpha n + 5\alpha + 2\beta - \frac{(3\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{X'''}, \\ Y'' &= 2\alpha n + 7\alpha + 2\beta - \frac{(3\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \delta)}{Y'''}, \end{aligned}$$

welche zu dieser Gleichung führt

$$(X''' - \alpha n - 5\alpha - 2\beta + \delta)(Y''' - \alpha n - 2\alpha - 2\beta + \delta)$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(4\alpha + 2\beta)n + (2\alpha + \delta)(2\alpha + 2\beta - \delta).$$

§51 Weil das Fortschreitungsgesetz daher schon erschlossen werden kann, werden wir haben

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{2\alpha n + \alpha + 2\beta - \cfrac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 3\alpha + 2\beta - \cfrac{(3\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \alpha + \delta)}{2\alpha n + 5\alpha + 2\beta - \cfrac{(3\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \alpha + 2\beta - \delta)}{2\alpha n + 7\alpha + 2\beta - \text{etc.}}}}}$$

welcher Kettenbruch wegen des hinreichend gefälligen Fortschreitungsgesetztes bemerkenswert ist.

AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $xxyy = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$ DURCH § 28

§52 Nach Setzen von

$$\delta = \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

wird wegen

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \zeta = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \theta = \gamma$$

sein

$$g = \delta, \quad f = -\alpha + \delta \quad \text{und} \quad \varepsilon = \delta,$$

woher die Substitution

$$xx = \alpha n - \alpha + \delta + \frac{(-\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n - \alpha + \delta)}{X},$$

$$yy = \alpha n + \delta + \frac{(-\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{Y}$$

aus § 27 diese Gleichung geben wird

$$\begin{gathered}(X + \alpha n - \alpha + \delta)(Y + \alpha n + \delta) \\ = \alpha\alpha nn + \alpha(2\beta - \alpha)n + (\delta - \alpha)(2\beta - \delta).\end{gathered}$$

Nachdem aber X und Y negativ genommen worden sind, dass aus § 28 ist

$$xx = \alpha n - \alpha + \delta + \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n - \alpha + \delta)}{X},$$

$$yy = \alpha n + \delta + \frac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n + \delta)}{Y},$$

wird man haben

$$(X - \alpha n + \alpha - \delta)(Y - \alpha n - \delta) = \alpha\alpha nn - \alpha(\alpha - 2\beta)n - (\alpha - \delta)(2\beta - \delta).$$

§53 Diese Gleichung liefert weiter gemäß derselben Formeln behandelt

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = \alpha - \delta, \quad \nu = -\delta,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = -\frac{1}{2}\alpha + \beta, \quad \theta = (\delta - \alpha)(2\beta - \delta),$$

woher wird

$$gg - (2\beta - \alpha)g + (\delta - \alpha)(2\beta - \delta) = 0,$$

also entweder

$$g = \delta - \alpha \quad \text{oder} \quad g = 2\beta - \delta$$

und

$$f = -\alpha + g \quad \text{sowie} \quad \varepsilon = g.$$

Daher wird die Substitution sein

$$X = 2\alpha n - 2\alpha + g + \delta + \frac{(2\beta - 2g)(\alpha n - \alpha + g)}{X'},$$
$$Y = 2\alpha n + g + \delta + \frac{(2\beta - 2g)(\alpha n + g)}{Y'},$$

welche zu dieser Gleichung führt

$$(X' - \alpha n - \alpha - g)(Y' - \alpha n + \alpha - g)$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(2\beta - 2\alpha)n + (g - \alpha)(2\beta - \alpha - g).$$

§54 Wir wollen diesen Buchstaben g beibehalten, der zwei Werte involviert, und die folgenden durch g', g'' anzeigen. Weil also hier ist

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = \alpha - g, \quad \nu = \alpha - g,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = -\alpha + \beta, \quad \theta = (g - a)(2\beta - \alpha - g),$$

wird entweder

$$g' = g - \alpha \quad \text{oder sein} \quad g' = 2\beta - \alpha - g$$

und daher

$$f = -2\alpha + g' \quad \text{und} \quad \varepsilon = g'$$

und daraus

$$X' = 2\alpha n - 3\alpha + g + g' + \frac{(2\beta - 2g')(\alpha n - \alpha + g')}{X''},$$
$$Y' = 2\alpha n - \quad \alpha + g + g' + \frac{(2\beta - 2g')(\alpha n + g')}{Y''},$$

woher diese Gleichung entspringt

$$(X'' - \alpha n + \alpha - g')(Y'' - \alpha n + 2\alpha - g')$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(2\beta - 3\alpha)n + (g' - \alpha)(2\beta - 2\alpha - g').$$

§55 Nun wird also weiter sein

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = \alpha - g', \quad \nu = 2\alpha - g',$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \beta - \frac{3}{2}\alpha, \quad \theta = (g' - \alpha)(2\beta - 2\alpha - g')$$

und daher entweder

$$g'' = g' - \alpha \quad \text{oder} \quad g'' = 2\beta - 2\alpha - g'$$

und

$$f = -3\alpha + g'' \quad \text{sowie} \quad \varepsilon = g''.$$

Daher wird die Substitution

$$X'' = 2\alpha n - 4\alpha + g' + g'' + \frac{(2\beta - 2g'')(\alpha n - \alpha + g'')}{X''},$$
$$Y'' = 2\alpha n - 2\alpha + g' + g'' + \frac{(2\beta - 2g'')(\alpha n + g'')}{Y''}$$

diese Gleichung geben

$$(X''' - \alpha n + \alpha - g'')(Y''' - \alpha n + 3\alpha - g'')$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(2\beta - 4\alpha)n + (g'' - \alpha)(2\beta - 3\alpha - g'').$$

§56 Nun ist für die Auflösung dieser Gleichung

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = \alpha - g'', \quad \nu = 3\alpha - g'',$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \beta - 2\alpha, \quad \theta = (g'' - \alpha)(2\beta - 3\alpha - g''),$$

woher entweder

$$g''' = g'' - \alpha \quad \text{oder auch gilt} \quad g''' = 2\beta - 3\alpha - g''$$
$$f = -4\alpha + g''' \quad \text{sowie} \quad \varepsilon = g'''.$$

Daher wird aus der Substitution

$$X''' = 2\alpha n - 5\alpha + g'' + g''' + \frac{(2\beta - 2g''')(\alpha n - \alpha + g''')}{X''''},$$
$$Y''' = 2\alpha n - 3\alpha + g'' + g''' + \frac{(2\beta - 2g''')(\alpha n + g''')}{X''''}$$

diese Gleichung entspringen

$$(X'''' - \alpha n + \alpha - g''')(Y'''' - \alpha n + 4\alpha - g''')$$
$$= \alpha\alpha nn + \alpha(2\beta - 5\alpha)n + (g''' - \alpha)(2\beta - 4\alpha - g''').$$

§57 Durch Sammeln von diesen wird aus der vorgelegten Gleichung

$$xx = \alpha\alpha nn + 2\alpha\beta n + \gamma$$

nach Setzen von

$$\delta = \beta + \sqrt{\beta\beta - \gamma},$$

wenn für die Buchstaben g', g'', g''', g'''' etc. die folgenden je zwei Werte angenommen werden

$$g = \begin{Bmatrix} \delta - \alpha, \\ 2\beta - \alpha \end{Bmatrix}, \quad g' = \begin{Bmatrix} g - \alpha, \\ 2\beta - \alpha - g \end{Bmatrix}, \quad g'' = \begin{Bmatrix} g' - \alpha, \\ 2\beta - 2\alpha - g' \end{Bmatrix}, \quad g'' = \begin{Bmatrix} g'' - \alpha, \\ 2\beta - 3\alpha - g'' \end{Bmatrix}, \quad \text{etc.},$$

der folgende Wert für xx erschlossen werden

$$xx = \alpha n - \alpha + \delta + \cfrac{(\alpha + 2\beta - 2\delta)(\alpha n - \alpha + \delta)}{2\alpha n - 2\alpha + \delta + g + \cfrac{(2\beta - 2g)(\alpha n - \alpha + g)}{2\alpha n - 3\alpha + g + g' + \cfrac{(2\beta - 2g')(\alpha n - \alpha + g')}{2\alpha n - 3\alpha + g' + g'' + \text{etc.}}}}$$

welcher also wegen der doppelten Werte der einzelnen δ, g, g', g'', g''' etc. ins Unendliche variieren kann.

§58 Wenn dieselbe Gleichung auf die gleiche Weise unter Beibehlat aller zweideutigen Werte gemäß § 25 aufgelöst wird und nach Nehmen von

$$\delta = \beta \pm + \sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

festgelegt wird

$$f = \begin{Bmatrix} \alpha + \delta \\ 2\beta - \delta \end{Bmatrix}, \quad f' = \begin{Bmatrix} \alpha + f \\ \alpha + 2\beta - f \end{Bmatrix}, \quad f'' = \begin{Bmatrix} \alpha + f' \\ 2\alpha + 2\beta - f' \end{Bmatrix}, \quad f''' = \begin{Bmatrix} \alpha + f'' \\ 3\alpha + 2\beta - f'' \end{Bmatrix} \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2\delta)(\alpha n + \delta)}{2\alpha n + \alpha + \delta + f - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2f)(\alpha n + f)}{2\alpha n + 2\alpha + f + f' - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2f')(\alpha n + f')}{2\alpha n + 3\alpha + f' + f'' - \cfrac{(\alpha - 2\beta + 2f'')(\alpha n + f'')}{2\alpha n + 4\alpha + f'' + f''' - \text{etc.}}}}}$$

§59 Wenn, indem die vorgelegte Gleichung gemäß § 24 behandelt wird, auf die gleiche Weise nach Setzen von

$$\delta = \beta \pm \sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

wie zuvor festgelegt wird

$$f = \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \delta, \\ 2\beta - \alpha \end{array} \right\}, \quad f' = \left\{ \begin{array}{c} \alpha + f, \\ \alpha + 2\beta - f \end{array} \right\}, \quad f'' = \left\{ \begin{array}{c} \alpha + f', \\ 2\alpha + 2\beta - f' \end{array} \right\}, \quad f'' = \left\{ \begin{array}{c} \alpha + f'', \\ 3\alpha + 2\alpha - f'' \end{array} \right\}, \quad \text{etc.,}$$

wird sein

$$xx = \alpha n + \delta - \cfrac{(2\beta - \alpha - 2\delta)(\alpha n + \delta)}{-\alpha - \delta - \cfrac{(2\beta + \alpha - 2f)(\alpha n + f)}{-f + f' - \cfrac{(2\beta + \alpha - 2f')(\alpha n + f')}{-\alpha - f' + f'' - \cfrac{(2\beta + 3\alpha - 2f'')(\alpha n + f'')}{-f'' + f''' - \cfrac{(2\beta + 3\alpha - 2f''')(\alpha n + f''')}{-\alpha - f''' + f'''' - \cfrac{(2\beta + 5\alpha - 2f'''')(\alpha n + f'''')}{-f'''' + f''''' - \text{etc.}}}}}}}$$

§60 Wenn weiter aus § 27 nach

$$\delta = \beta \pm \sqrt{\beta\beta - \gamma}$$

festgelegt wird

$$g = \left\{ \begin{array}{c} \delta - \alpha, \\ 2\beta - \alpha \end{array} \right\}, \quad g' = \left\{ \begin{array}{c} g - \alpha, \\ 2\beta - \alpha - g \end{array} \right\}, \quad g'' = \left\{ \begin{array}{c} g' - \alpha, \\ 2\beta - 2\alpha - g' \end{array} \right\}, \quad g'' = \left\{ \begin{array}{c} g'' - \alpha, \\ 2\beta - 3\alpha - g'' \end{array} \right\}, \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$xx = \alpha n - \alpha + \delta - \cfrac{(2\beta - 2\delta + \alpha)(\alpha n - \alpha + \delta)}{g - \delta - \cfrac{(2\beta - 2g)(\alpha n - \alpha + g)}{g' - g + \alpha - \cfrac{(2\beta - 2g' - 2\alpha)(\alpha n - \alpha + g')}{g'' - g' - \cfrac{(2\beta - 2g'' - 2\alpha)(\alpha n - \alpha + g'')}{g''' - g'' + \alpha - \cfrac{(2\beta - 2g''' - 4\alpha)(\alpha n - \alpha + g''')}{g'''' - g''' - \cfrac{(2\beta - 2g'''' - 4\alpha)(\alpha n - \alpha + g'''')}{g''''' - g'''' + \alpha + \text{etc.}}}}}}}$$

§61 Es könnten aber durch Vermischen dieser Reduktionen unzählige andere Kettenbrüche gefunden werden, die alle den Wert von xx ausdrückten; aber wir wollen mit diesen vier allgemeinen Formen, denen die erste in § 33 dargebotene hinzugefügt werden kann, zufrieden sein und wollen sie auf einen gewissen Spezialfall anwenden. Es sei natürlich

$$xxyy = nn$$

oder es werde eine Reihe solcher Art gesucht

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f \quad \text{etc.}$$

dass ist

$$ab = 1, \quad bc = 2, \quad cd = 3, \quad de = 4, \quad ef = 5, \quad \text{etc.}, \ \ldots \ xy = n,$$

und wir haben schon angemerkt (§ 12), dass gelten wird

$$aa = \frac{2}{\pi}, \quad bb = \frac{\pi}{2}, \quad cc = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\pi}, \quad dd = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad ee = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2}{\pi} \quad \text{etc.}$$

Darauf wird in der Tat aus § 6 erschlossen

$$xx = n \cdot \frac{\int z^n dz : \sqrt{1-zz}}{\int z^{n-1} dz : \sqrt{1-zz}}$$

oder durch ein unendliches Produkt

$$xx = n \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+2)(n+4)}{(n+3)^2} \cdot \frac{(n+4)(n+6)}{(n+5)^2} \cdot \frac{(n+6)(n+8)}{(n+7)^2} \cdot \text{etc.}$$

Wir wollen nun also sehen, wie dieser Wert von xx durch Kettenbrüche ausgedrückt werden kann.

§62 Weil also für die vorgelegte Gleichung

$$xxyy = nn$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ist, wird gemäß § 33 gelten

$$N = n - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B = 0,$$

woher wird

$$xx = n - \frac{1}{2} + \cfrac{1:4}{2n-1+\cfrac{9:4}{2n-1+\cfrac{25:4}{2n-1+\cfrac{49:4}{2n-1+\text{etc.}}}}}$$

oder

$$2xx = 2n-1+\cfrac{1}{2(2n-1)+\cfrac{9}{2(2n-1)+\cfrac{25}{2(2n-1)+\cfrac{49}{2(2n-1)+\cfrac{81}{2(2n-1)+\text{etc.}}}}}}$$

§63 Weiter wird aus § 59 wegen

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \text{und} \quad \delta = 0,$$

wenn genommen wird

$$f = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad f' = \begin{Bmatrix} 1+f \\ 1-f \end{Bmatrix}, \quad f'' = \begin{Bmatrix} 1+f' \\ 2-f' \end{Bmatrix}, \quad f''' = \begin{Bmatrix} 1+f'' \\ 3-f'' \end{Bmatrix}, \quad f'''' = \begin{Bmatrix} 1+f''' \\ 4-f''' \end{Bmatrix},$$

sein

$$xx = n + \cfrac{n}{f-1-\cfrac{(1-2f)(n+f)}{f'-f-\cfrac{(1-2f')(n+f')}{f''-f'-1-\cfrac{(3-2f'')(n+f'')}{f'''-f''-\cfrac{(3-2f''')(n+f''')}{f''''-f'''-1-\cfrac{(5-2f'''')(n+f'''')}{f'''''-f''''-\text{etc.}}}}}}}$$

oder aus § 58 unter denselben Benennungen

$$xx = n - \cfrac{n}{2n+1+f-\cfrac{(1+2f)(n+f)}{2n+2+f+f'-\cfrac{(1+2f')(n+f')}{2n+3+f'+f''-\cfrac{(1+2f'')(n+f'')}{2n+4+f''+f'''-\cfrac{(1+2f''')(n+f''')}{2n+5+f'''+f''''-\text{etc.}}}}}}$$

§64 Darauf wird nach Setzen von

$$g = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad g' = \begin{Bmatrix} g-1 \\ -1-g \end{Bmatrix}, \quad g'' = \begin{Bmatrix} g'-1 \\ -1-g' \end{Bmatrix}, \quad g''' = \begin{Bmatrix} g''-1 \\ 3-g'' \end{Bmatrix} \quad \text{etc.}$$

aus § 60 sein

$$xx = n-1-\cfrac{n-1}{g+\cfrac{2g(n-1+g)}{g'-g+1+\cfrac{2(1+g')(n-1+g')}{g''-g'+\cfrac{2(1+g'')(n-1+g'')}{g'''+g''+1+\cfrac{2(1+g''')(n-1+g''')}{g''''-g'''+\text{etc.}}}}}}$$

und aus § 57

$$xx = n-1+\cfrac{n-1}{2n-2+g-\cfrac{2g(n-1+g)}{2n-3+g+g'-\cfrac{2g'(n-1+g')}{2n-4+g'+g''-\cfrac{2g''(n-1+g'')}{2n-5+g''+g'''-\text{etc.}}}}}$$

§65 Allgemein ist also für die Reihe a, b, c, d etc., in welcher sei

$$ab = p, \quad bc = p+q, \quad cd = p+2q, \quad ,de = p+2q, \quad \text{etc.}, \quad \dots \quad xy = p+nq,$$

aus den oben gesagten Dingen [§ 6] bekannt, dass gilt

$$xx = (p+nq)\cdot\frac{(p+nq)(p+(n+2)q)}{(p+(n+1)q)(p+(n+1)q}\cdot\frac{(p+(n+2)q)(p+(n+4)q)}{(p+(n+3)q)(p+(n+3)q}\cdot\text{etc.}$$

und durch Integralformeln

$$xx = (p + nq) \cdot \frac{\int z^{p+(n+1)q-1} dz : \sqrt{1 - z^{2q}}}{\int z^{p+nq-1} dz : \sqrt{1 - z^{2q}}},$$

nachdem $z = 1$ gesetzt worden ist. Nun werden wir wegen

$$xxyy = qqnn + 2pqn + pp$$

$\alpha = q$, $\beta = p$ und $\gamma = pp$ haben, daher $\delta = p$. Daher wird aus § 33 sein

$$N = nq - \frac{q}{2} + p \quad \text{und} \quad B = 0$$

und daher

$$xx = p + q\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \cfrac{\frac{1}{4}qq}{2p + q(2n-1) + \cfrac{\frac{9}{4}qq}{2p + q(2n-1) + \cfrac{\frac{25}{4}qq}{2p + q(2n-1) + \cfrac{\frac{49}{4}qq}{2p + q(2n-1) + \text{etc.}}}}}$$

§66 Aber durch die übrigen Formeln, wenn wir zuerst festlegen

$$f = \begin{Bmatrix} q + p \\ p \end{Bmatrix}, \quad f' = \begin{Bmatrix} q + f \\ p + 2p - f \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} q + f'' \\ 2p + 2p - f' \end{Bmatrix}, \quad f''' \begin{Bmatrix} q + f' \\ 2p + 2p - f' \end{Bmatrix}, \quad \text{etc.},$$

werden wir aus § 59 haben

$$xx = qn + p + \cfrac{q(qn+p)}{f - p - q - \cfrac{(q+2p-2f)(qn+f)}{f' - f - \cfrac{(q+2p-2f')(qn+f')}{f'' - f' - q - \cfrac{(3q+2p-2f'')(qn+f'')}{f''' - f'' - \cfrac{(3q+2p-2f''')(qn+f''')}{f'''' - f''' - \text{etc.}}}}}}$$

und aus § 58

$$xx = qn + p - \cfrac{q(qn+p)}{2qn + q + p + f - \cfrac{(q-2p+2f)(qn+f)}{2qn + 2q + f + f' - \cfrac{(q-2p+2f')(qn+f')}{2qn + 3q + f' + f'' - \text{etc.}}}}$$

wo von den drei gegebenen Zahlen p, q, n irgendwelche zwei negativ angenommen werden können, weil ja die aufzulösende Gleichung daher keine Veränderung erfährt.

§67 Des Weiteren, wenn wir setzen

$$g = \begin{Bmatrix} p-q \\ p \end{Bmatrix}, \quad g' = \begin{Bmatrix} g-q \\ 2p-q-g \end{Bmatrix}, \quad g'' = \begin{Bmatrix} g'-q \\ 2p-2q-g' \end{Bmatrix}, \quad g''' = \begin{Bmatrix} g''-q \\ 2p-3q-g'' \end{Bmatrix}, \quad \text{etc.,}$$

wird durch § 60 sein

$$xx = qn - q + p - \cfrac{q(qn-q+p)}{g - p - \cfrac{2(p-q)(qn-q+p)}{g' - g + q - \cfrac{2(p-g'-q)(qn-q+g')}{g'' - g' - \cfrac{2(p-g''-q)(qn-q+g'')}{g''' - g'' + q - \text{etc.}}}}}$$

durch § 57

$$xx = qn - q + p + \cfrac{q(qn-q+p)}{2qn - 2q + p + g + \cfrac{2(p-g)(qn-q+g)}{2qn - 3q + g + g' + \cfrac{2(p-g')(qn-q+g')}{2qn - 4q + g' + g'' + \text{etc.}}}}$$

§68 Aber über diese ins Unendliche laufenden Ausdrücke ist es festzuhalten, dass sie oftmals divergenten Reihen gleichwertig sind, so dass, um so weiter wir deren Werte berechnen, wir auch umso mehr von der Wahrheit abweichen; dieser Umstand tritt dennoch im ersten Ausdruck nicht auf. Deswegen haben in diesen Fälle über sie dieselben Dinge Geltung, welche ich schon über die Natur von divergenten Reihen angemerkt habe, natürlich, dass sie als aus der Entwicklung einer gewissen endlichen Formel entstandene unendliche Formeln anzusehen sind, die nichtsdestoweniger für deren Summe zu halten sind, auch wenn, wo auch immer wir beim Sammeln der Teile halt gemacht haben, wir den wahren niemals erreichen.

§69 Wir wollen auch diese Reihe untersuchen

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \quad \text{etc.}$$

in welcher sei

$$ab = \frac{\beta}{\gamma}, \quad bc = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}, \quad cd = \frac{2\alpha+\beta}{2\alpha+\gamma}, \quad de = \frac{3\alpha+\beta}{3\alpha+\gamma} \quad \text{etc.}$$

und daher im Allgemeinen

$$xy = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma},$$

und man wird haben

$$x = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma} \cdot \frac{\alpha(n+1)+\beta}{\alpha(n+1)+\gamma} \cdot \frac{\alpha(n+2)+\beta}{\alpha(n+2)+\gamma} \cdot \frac{\alpha(n+3)+\beta}{\alpha(n+3)+\gamma} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$x = \frac{\int z^{\alpha n+\gamma-1}dz : \sqrt{1-z^{2\alpha}}}{\int z^{\alpha n+\beta-1}dz : \sqrt{1-z^{2\alpha}}}.$$

Weil nun, wenn $n = \infty$ wäre, $x = y = 1$ wäre, werden die Werte x und y immer mehr an die Einheit herankommen; daher werde festgelegt

$$x = 1 + \frac{A}{X} \quad \text{und} \quad y = 1 + \frac{A}{Y}$$

und es wird werden

$$(X+A)(Y+A) = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}XY$$

oder

$$(\beta-\gamma)XY - A(\alpha n+\gamma)X - A(\alpha n+\gamma)Y = AA(\alpha n+\gamma).$$

Es sei

$$A = \beta - \gamma$$

oder

$$x = 1 + \frac{\beta - \gamma}{X} \quad \text{und} \quad y = 1 + \frac{\beta - \gamma}{Y}$$

und man wird haben

$$XY - (\alpha n + \gamma)X - (\alpha n + \gamma)Y = (\beta - \gamma)(\alpha n + \gamma)$$

oder

$$(X - \alpha n - \gamma)(Y - \alpha n - \gamma) = (\alpha n + \beta)(\alpha n + \gamma).$$

§70 Aus dieser Gleichung können die Werte X und Y nun durch die oben gegebenen Formeln auf unendlich viele Weisen dargeboten werden, aus welchen § 19 eine besonders konvergente an die Hand gibt. Weil aber gilt

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = -\gamma, \quad \nu = -\gamma, \quad \zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \text{und} \quad \theta = \beta\gamma,$$

wird werden

$$X = 2\alpha n - \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2}{X'},$$
$$Y = 2\alpha n + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + \frac{\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2}{Y'}$$

und daher tritt diese neue Gleichung ans Licht

$$\left(X' - \alpha n - \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)\left(Y' - \alpha n + \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right) = (\alpha n + \beta)(\alpha n + \gamma).$$

§71 Wenn daher diese Gleichung erneut auf die gleiche Weise entwickelt wird, wird wegen

$$\delta = -\alpha, \quad \mu = -\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma, \quad \nu = \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{\beta+\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \theta = \beta\gamma,$$

dass $\eta\eta - \theta = \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2$ ist, diese Substitution entspringen

$$X' = 2\alpha n - \alpha + \beta + \gamma + \frac{4\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2}{X''},$$
$$Y' = 2\alpha n + \alpha + \beta + \gamma + \frac{4\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2}{Y''},$$

welche diese Gleichung liefert

$$\left(X'' - \alpha n - 2\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)\left(Y'' - \alpha n + 2\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right) = (\alpha n + \beta)(\alpha n + \gamma).$$

§72 Weil nun hier ist

$$\lambda = -\alpha, \quad \mu = -2\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma, \quad \nu = 2\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma,$$
$$\zeta = \alpha, \quad \eta = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \theta = \beta\gamma,$$

wird diese Substitution entspringen

$$X'' = 2\alpha n - \alpha + \beta + \gamma + \frac{9\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta - \gamma)^2}{X''},$$
$$Y'' = 2\alpha n + \alpha + \beta + \gamma + \frac{9\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta - \gamma)^2}{Y'''},$$

und daher diese Gleichheit

$$\left(X''' - \alpha n - 3\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)\left(Y''' - \alpha n + 3\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)$$
$$= (\alpha n + \beta)(\alpha n + \gamma).$$

§73 Indem auf diese Weise weiter fortgeschritten wird, werden wir schließlich diese Auflösung der vorgelegten Gleichung

$$xy = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

erreichen

$$x = 1 + \cfrac{\beta - \alpha}{2\alpha - \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + \cfrac{\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2}{2\alpha - \alpha + \beta + \gamma + \cfrac{4\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2}{2\alpha - \alpha + \beta + \gamma + \cfrac{9\alpha\alpha - \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2}{2\alpha - \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}}}}}$$

so dass ist

$$x = \frac{\int z^{\alpha n + \gamma - 1} dz : \sqrt{1 - z^{2\alpha}}}{\int z^{\alpha n + \beta - 1} dz : \sqrt{1 - z^{2\alpha}}}.$$

§74 Wir wollen gewisse Beispiele durchgehen und es sei zuerst

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2 \quad \text{und} \quad \gamma = 0;$$

es wird sein

$$x = \frac{\int z^{n-1} dz : \sqrt{1 - zz}}{\int z^{n+1} dz : \sqrt{1 - zz}} = \frac{n+1}{n}$$

und daher

$$x = 1 + \cfrac{2}{2n + \cfrac{1 - 1}{2n + 1 + \text{etc.}}} = 1 + \frac{1}{n},$$

wie klar zu tage tritt. Und im Allgemeinen, wenn $\alpha = 1$ ist, sooft $\beta - \gamma$ eine gerade Zahl ist, wird der Wert von x rational ausgedrückt.

§75 Während $\alpha = 1$ bleibt, sei

$$\beta = 1 \quad \text{und} \quad \gamma = 0;$$

es wird

$$x = \frac{\int z^{n-1}dz : \sqrt{1-zz}}{\int z^n dz : \sqrt{1-zz}}$$

aus dieser Gleichung sein

$$xy = \frac{n+1}{n},$$

aber durch einen Kettenbruch

$$x = 1 + \cfrac{1}{2n - \frac{1}{2} + \cfrac{1-\frac{1}{4}}{2n + \cfrac{4-\frac{1}{4}}{2n + \cfrac{9-\frac{1}{4}}{2n + \text{etc.}}}}} = 1 + \cfrac{2}{4n - 1 + \cfrac{1\cdot 3}{4n + \cfrac{3\cdot 5}{4n + \cfrac{5\cdot 7}{4n + \text{etc.}}}}}$$

Aber nach Nehmen von

$$\beta == \quad \text{und}\gamma = 1$$

geht der reziproke Wert hervor

$$\frac{1}{x} = 1 - \cfrac{1}{2n + \frac{1}{2} + \cfrac{1 - \frac{1}{4}}{2n + \cfrac{4 - \frac{1}{4}}{4n + \text{etc.}}}} = 1 - \cfrac{2}{4n + 1 + \cfrac{1 \cdot 3}{4n + \cfrac{3 \cdot 5}{4n + \cfrac{5 \cdot 7}{4n + \text{etc.}}}}}$$

dessen Übereinstimmung mit dem vorhergehenden leicht erkannt wird.

§75 Wenn daher nun für n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. eingesetzt werden, werden die folgenden Kettenbrüche aufgefunden werden

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \cfrac{7 \cdot 9}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1 \cdot 3}{8 + \cfrac{3 \cdot 5}{8 + \cfrac{5 \cdot 7}{8 + \cfrac{7 \cdot 9}{8 + \text{etc.}}}}}}$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{1 \cdot 3}{12 + \cfrac{3 \cdot 5}{12 + \cfrac{5 \cdot 7}{12 + \cfrac{7 \cdot 9}{12 + \text{etc.}}}}}}$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi}=1+\cfrac{2}{15+\cfrac{1\cdot 3}{16+\cfrac{3\cdot 5}{16+\cfrac{5\cdot 7}{16+\cfrac{7\cdot 9}{16+\text{etc.}}}}}}$$

§77 Daher werden umgekehrt die Werte von Kettenbrüchen dieser Art ausfindig gemacht werden können. Es sei nämlich dieser Bruch vorgelegt

$$s=\cfrac{\alpha\alpha-\delta\delta}{m-\alpha+\cfrac{4\alpha\alpha-\delta\delta}{m-\alpha+\cfrac{9\alpha\alpha-\delta\delta}{m-\alpha+\cfrac{16\alpha\alpha-\delta\delta}{m-\alpha+\text{etc.}}}}}$$

es wird gelten [§ 73]

$$\beta-\gamma=2\delta \quad \text{und} \quad 2\alpha n+\beta+\gamma=m$$

woher wird

$$\beta=2\delta+\gamma \quad \text{und} \quad 2\alpha n=m-2\delta-2\gamma$$

und so

$$x=1+\frac{2\delta}{m-\alpha-\delta+s}=\frac{m-\alpha+\delta+s}{m-\alpha-\delta+s},$$

also

$$s = \frac{2\delta}{x-1} - m + \alpha + \delta.$$

Aber es ist

$$x = \frac{\int z^{\frac{1}{2}m-\delta-1}dz : \sqrt{1-z^{2\alpha}}}{\int z^{\frac{1}{2}m+\delta-1}dz : \sqrt{1-z^{2\alpha}}},$$

woher, wenn folgendes festgelegt wird

$$\int \frac{z^{\frac{1}{2}m-\delta-1}dz}{\sqrt{1-z^{2\alpha}}} = P \quad \text{und} \quad \int \frac{z^{\frac{1}{2}m+\delta-1}dz}{\sqrt{1-z^{2\alpha}}} = Q,$$

sein wird

$$s = \frac{(m-\alpha+\delta)Q - (m-\alpha-\delta)P}{P-Q}.$$

§78 Daher, wenn festgelegt wird

$$\delta = \varepsilon\sqrt{-1},$$

dass ist

$$s = \cfrac{\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon}{m + \cfrac{4\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon}{m + \cfrac{9\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon}{m + \cfrac{16\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon}{m + \text{etc.}}}}}$$

und wegen

$$z^{-\delta} = z^{-\varepsilon\sqrt{-1}} = e^{-\varepsilon\sqrt{-1}\cdot\log z} = \cos\varepsilon\log - \sqrt{-1}\cdot\sin\varepsilon\log z,$$

ebenfalls Nachstehendes festgesetzt wird

$$\int \frac{z^{\frac{1}{2}m-1}dz\cos\varepsilon\log z}{\sqrt{1-z^{2\alpha}}} = R$$

und

$$\int \frac{z^{\frac{1}{2}m-1}dz\sin\varepsilon\log z}{\sqrt{1-z^{2\alpha}}} = S$$

wird sein

$$P = R - S\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad Q = R + S\sqrt{-1}$$

und daher

$$s = \frac{2(m-\alpha)S\sqrt{-1} + 2\varepsilon R\sqrt{-1}}{-2S\sqrt{-1}} = \alpha - m - \varepsilon\frac{R}{S},$$

wo es zu anzumerken ist, dass die Integrale R und S so genommen werden müssen, dass sie für $z = 0$ gesetzt verschwinden, dann aber $z = 1$ gesetzt werden muss.